1 ★★ 30 د — دراسة دالة / دالة أصلية لدالة

الحل ص. 324

نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=\ln(x+1)+2x .$$

نرمز لمنحنى الدالة g في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$، بـ $\mathscr{C}_g$ ($\|\vec{i}\|=2\text{cm}$ و $\|\vec{j}\|=1\text{cm}$).

1. a. حدد نهايات الدالة g في محدات حيز تعريف g ، استنتج أن $\mathscr{C}_g$ تقبل مستقيما مقاربا $\mathscr{D}$ ، حدد معادلته.

b. حدد تغيرات كل من الدالتين، h و k المعرفتين على المجال $]-1,+\infty[$ بـ :

$$h(x)=\ln(x+1) \quad و \quad k(x)=2x$$

استنتج تغيرات الدالة g على $]-1,+\infty[$.

c. أنشئ جدول تغيرات g على $]-1,+\infty[$.

2. أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة الدالة g على $[0,+\infty[$ و على $]-1,0]$.
3. أنشئ المنحنى $\mathscr{C}_g$ و المستقيم المقارب $\mathscr{D}$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
4. بين أن الدالة G المعرفة على $]-1,+\infty[$ بـ : $G(x)=x\ln(x+1)+\ln(x+1)-x+x^2$.
هي دالة أصلية للدالة g .

2 ★★ 30 د — تحديد نقط انعطاف دالة

الحل ص. 325

نعتبر الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$$

و ليكن $\mathscr{C}$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$، (نأخذ الوحدة هي 2 cm).

1. أدرس $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى $\mathscr{C}$.
2. حدد المشتقة f' للدالة f على $]0,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيرات الدالة f
3. حدد الأفصول x_1 لنقطة تقاطع المنحنى $\mathscr{C}$ و محور الأفاصيل.
4. حدد معادلة المماس T في النقطة ذات الأفصول $x_2=e^{-\frac{1}{2}}$.
5. بين أن $f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$ $\forall x\in\,]0,+\infty[$ ثم استنتج أن $\mathscr{C}$ يقبل نقطة انعطاف.
6. أرسم المنحنى $\mathscr{C}$ و المماس T .

3 ★★ 30 د — استعمال دالة مساعدة

الحل ص. 328

الجزء .أ.

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=1-x-2\ln x$$

1. أحسب $g'(x)$ مشتقة الدالة g ؛ استنتج جدول تغيرات g (لا يُطلب حساب نهايات g).
2. أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء .ب.

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$$

1. بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

2. حدد نهايات f في 0 و في $+\infty$.

3. إعط جدول تغيرات f .

4. استنتج من الدراسة السابقة أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ، x_0 ، في المجال $]0,1[$.
بين أن $0,5<x_0<0,6$.

4 ★★ 45 د تحديد حل معادلة

الحل ص. 330

الجزء A . نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ حيث $\mathscr{C}_g$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\mathscr{C}_g$ يقطع محور الأفاصيل في نقطتين.

$\mathscr{C}_g$ يقبل مستقيما مقاربا هو Δ .

1. من هذا التمثيل المبياني حدد :

a. نهاية $g(x)$ عندما x يؤول إلى 0 .

b. نهاية $g(x)$ عندما x يؤول إلى $+\infty$.

c. $g(1)$ و $g(3)$.

2. أنشئ جدولا يعطي إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

نقبل أن : $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$ $x\in]0,+\infty[$.

الجزء B.

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=-\frac{3}{x}-4\ln x+x$$

1. a. عمل بـ x في تعبير $f(x)$ ، ثم بين أن نهاية $f(x)$ عندما x تؤول إلى $+\infty$ هي $+\infty$.

b. عمل بـ $\frac{1}{x}$ في تعبير $f(x)$ ، ثم بين أن نهاية $f(x)$ عندما x تؤول إلى 0 هي $-\infty$.

2. a. أحسب $f'(x)$ ثم بين أن $f'(x)=g(x)$ ، $\forall x\in]0,+\infty[$

b. استعمل نتائج الجزء A لاستنتاج جدول تغيرات الدالة f .

c. أحسب $f(1)$ و $f(3)$.

II. باستعمال جدول تغيرات الدالة f .

1. إعط تعليلا أن المعادلة $f(x)=0$:

a. لا تقبل حلا في المجال $]0,3[$.

b. تقبل حلا وحيدا، x_0 ، ينتمي إلى المجال $]3,10[$.

c. لا تقبل حلا في المجال $]10,+\infty[$.

2. إملأ الجدول التالي ثم استنتج تأطيرا لـ x_0 سعته 10^{-2} .

x	$9,19$	$9,20$	$9,21$	$9,22$
$f(x)$				

3. a. بين أن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$.

b. أنشئ $\mathscr{C}$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (نأخذ الوحدة 1 cm).

5 ★★ 45 د تحديد حل معادلة

الحل ص. 332

الجزء A . 1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$$

a. أحسب g' مشتقة الدالة g ، ثم استنتج تغيرات g .

b. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,7;1,8[$.

c. بين أن $\alpha\ln\alpha=1$ ثم حدد إشارة $g(x)$ لكل $x\in]0,+\infty[$.

الجزء B. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln x+x-x\ln x$

1. a. أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ ، استنتج معادلة المستقيم المقارب لـ $\mathscr{C}$ منحنى f .

b. تحقق أن $f(x)=x\left(\frac{\ln x}{x}+1-\ln x\right)$ ، استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

c. بين أن $\mathscr{C}$ منحنى f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه (Oy).

2. a. أحسب المشتقة f' للدالة f على $]0,+\infty[$ ، و بين أن لكل $x>0$ $f'(x)=-g(x)$.

b. أنشئ جدول تغيرات f على $]0,+\infty[$ ، (لا يطلب تحديد النهايات).

استعمل **A. 1. c.** لكي تبين أن $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}+\alpha-1$

نأخذ $\alpha=1,7$ ، حدد قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ بالدقة 10^{-2}.

c. أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، وحدته 2cm .

6 ★★ | 50 د | دراسة دالة باستعمال دالة مساعدة | الحل ص. 335

A. نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي:

$$g(x)=x-\ln x$$

1. بين أن مجموعة تعريف الدالـة g هي $\mathscr{D}_g=]0,+\infty[$.

2. أدرس تغيرات g على $]0,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيرات g .

3. أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

4. استـنـتـج أن $x>\ln x$ لكل $x>0$.

B. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}, & x>0\\ f(0)=-1\end{cases}$$

و $\mathscr{C}$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن مجموعة تعريف الدالـة f هي $\mathscr{D}_f=[0,+\infty[$.

2. a. بين أن f متصلة على اليمين في 0.

b. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3. a. بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين.

b. بين أن $f'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيرات f .

4. a. حدد تقاطع المنحنى $\mathscr{C}$ و المستقيم (Δ) الذي معادلته الديكارتية : $y=1$.

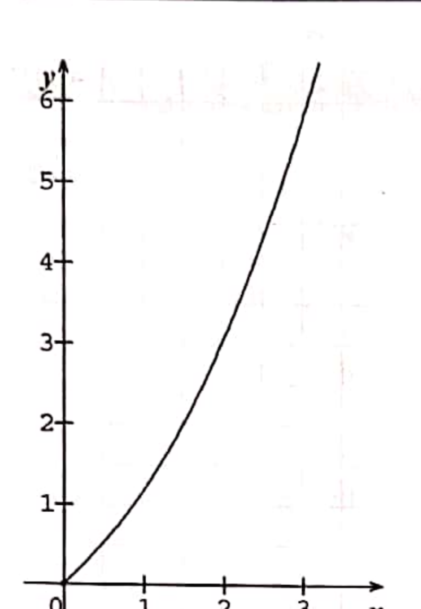
b. بين أن $\mathscr{C}$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى المجال $]\frac{1}{2},1[$.

c. أنشئ المنحنى $\mathscr{C}$ (نأخذ $e\approx2,7$ و $\ln2\approx0,7$ و $\|\vec{i}\|=1\text{ cm}$.

7 ★★★ | 50 د | دالة اللوغاريتم و المتتاليات | الحل ص. 338

الجزء A

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـما يلي :



$$f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2$$

و ليكن $\mathscr{C}$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.
2. حدد معادلة المماس T للمنحنى $\mathscr{C}$ في النقطة ذات الفصول 0.
3. نريد أن نبين أن المنحنى $\mathscr{C}$ يوجد فوق المستقيم T على المجال $[0,+\infty[$.

لأجل هذا نعتبر الدالة g المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ :

$$g(x)=f(x)-x$$

a. أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0,+\infty[$.

b. أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

c. استنتج أن $f(x)\geq x$ ، $\forall x\in[0,+\infty[$ ثم وضعية المنحنى $\mathscr{C}$ بالنسبة للمستقيم T

4. أرسم T على الشكل.

الجزء B

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=1$ و لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1. أنشئ على محور الأفاصيل الخمس حدود الأولى للمتتالية (u_n) .
(يجب أن تظهر خطوط الإنشاء على الشكل).
2. من خلال الشكل تنبأ بتغيرات المتتالية (u_n) ثم بنهاية u_n .
3. a. بين باستعمال الترجع أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، $u_n\geq 1$.

b. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

c. بين أن المتتالية (u_n) غير مكبورة .

d. استنتج نهاية u_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

8 ★★★ 65 د الحل ص. 341

I. أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x)=-x^2+3x-1-\ln x$$

(تحديد D_f ، دراسة اتصال f ، حساب النهايات، حساب f' ثم جدول تغيرات f).

II. أدرس تغيرات الدالة g المعرفة بما يلي :

$$g(x)=x-\ln(x)$$

(تحديد D_g ، النهايات، حساب g' ثم جدول تغيرات g).

III. نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي.

$$h(x)=\ln(x-\ln x)$$

1. أدرس تغيرات الدالة h : (تحديد D_h ، حساب النهايات، حساب h' ثم جدول تغيرات h).
2. ليكن $\mathscr{C}_h$ منحنى الدالة h في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $\mathscr{C}_h$.
3. a. بين أن $\forall x\in]0,+\infty[\ ;h''(x)=\dfrac{f(x)}{x^2(x-\ln x)^2}$.
ثم باستعمال نتائج السؤال (I) ، بين أن $\mathscr{C}_h$ يقبل نقطة انعطاف تنتمي إلى المجال $]1,+\infty[$ (لا يطلب تحديد أفصولها).

b. لتكن x_0 أفصول نقطة الانعطاف. بين أن $x_0\in]2,3[$.

4. أنشئ $\mathscr{C}_h$.

1

.1 $g(x)=\ln(x+1)+2x$

.a • نحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$:

بمــا أن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$ فــإن $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty \\ \text{و } \lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty\end{cases}$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)+2x=+\infty$

و بالتالي $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

• نحسب $\lim_{x\to-1^+} g(x)$:

عندما يؤول x إلى -1^+ فإن $x+1$ يؤول إلى 0^+ و منه

$\lim_{x\to-1^+}\ln(x+1)=-\infty$

كما أن $\lim_{x\to-1^+}2x=-2$

إذن $\lim_{x\to-1^+}(\ln(x+1)+2x)=-\infty$ أي $\lim_{x\to-1^+} g(x)=-\infty$

المنحنى $\mathscr{C}_g$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-1$: $\mathscr{D}$.

إذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ فإن $\mathscr{C}_f$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=a$.

.b ▪ حساب $h'(x)$

الدالة h هي مركب $(x\to x+1)$ و دالة اللوغاريتم النبيري $x\to\ln x$ قابلتين للاشتقاق على $]-1,+\infty[$

إذن h قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$.

لكل $x\in]-1,+\infty[$ ، $h'(x)=[\ln(x+1)]'=\dfrac{(x+1)'}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}$

$u>0, (\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

$x\in]-1,+\infty[$ أي $x>-1$ إذن $x+1>0$ و منه $\dfrac{1}{x+1}>0$

إذن لكل $x\in]-1,+\infty[$ ، $h'(x)>0$ و بالتالي **الدالة h تزايدية قطعا على $]-1,+\infty[$.**

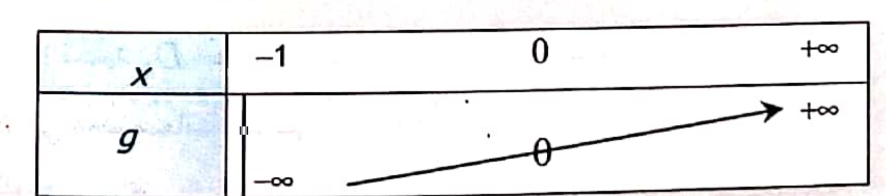
▪ لدينا $k'(x)=2>0$

إذن $\forall x\in]-1,+\infty[$ ، $k'(x)>0$ و بالتالي **الدالة k تزايدية قطعا على $]-1,+\infty[$.**

▪ بما أن مجموع دالتين تزايديتين قطعا هو دالة تزايدية قطعا .

نستنتج أن **الدالة $g: x\to\ln(x+1)+2x$ تزايدية قطعا على حيز تعريفها $]-1,+\infty[$.**

.c جدول تغيرات g على $]-1,+\infty[$:



x	-1	0	$+\infty$
g	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

.2 لدينا $g(0)=\ln(0+1)+2\times0=0+0=0$

الدالة g تزايدية قطعا على $]-1,+\infty[$ و تنعدم في 0 ، نستنتج أن :

$\forall x\in]-1,0[$ ، $g(x)<0$ و $\forall x\in[0,+\infty[$ ، $g(x)\geq0$.

.3 إنشاء المنحنى $\mathscr{C}_g$ و المستقيم المقارب $\mathscr{D}$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. أنظر الشكل.

حلول

4. $G(x) = x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x + x^2$

تكون G دالة أصلية للدالة g على $]-1,+\infty[$ إذا و فقط إذا كانت G قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ و إذا كان لكل x من $]-1,+\infty[$ ، $G'(x) = g(x)$.

الدالة G قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ (مركب ،جذاء، مجموع ... دوال قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$).

مشتقة الدالة G هي :

$$G'(x) = \left[x\ln(x+1)\right]' + \left[\ln(x+1)\right]' - (x)' + (x^2)'$$

$$= (x)'\ln(x+1) + x\left[\ln(x+1)\right]' + \frac{(x+1)'}{x+1} - 1 + 2x$$

$$= (1)\times\ln(x+1) + x\frac{(x+1)'}{x+1} + \frac{(x+1)'}{x+1} - 1 + 2x$$

$$= \ln(x+1) + x\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - 1 + 2x$$

$$= \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - 1 + 2x$$

$$= \ln(x+1) + 1 - 1 + 2x$$

$$= \ln(x+1) + 2x = g(x)$$

لدينا $\forall x \in]-1,+\infty[\;; G'(x) = g(x)$ إذن الدالة G هي إذن دالة أصلية للدالة g.



يمكننا أن نبين أن منحنى الدالة g يقبل اتجاه مقارب المستقيم $\mathcal{D}$ ذو المعادلة $y = 2x$:

بما أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ نحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.

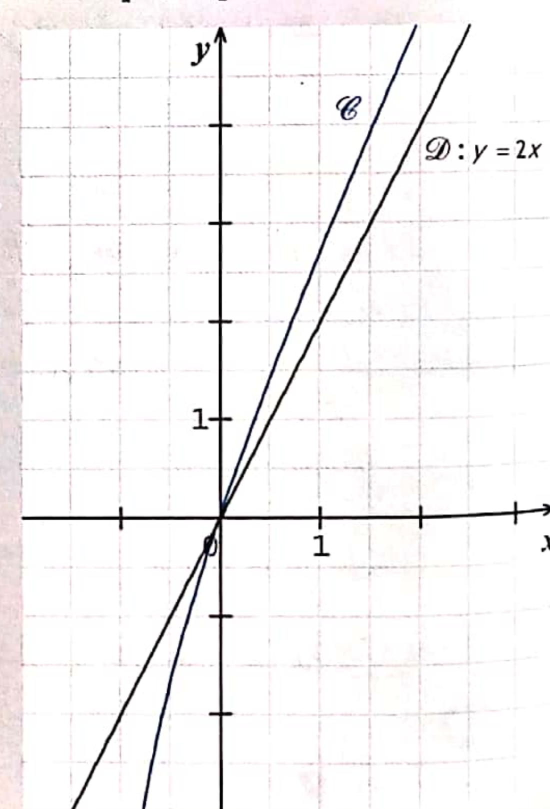
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)+2x}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{2x}{x}}_{\to 2} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty}(\ln(x+1)+2x-2x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln(x+1) = +\infty.$$

إذن منحنى الدالة g يقبل اتجاه مقارب المستقيم $\mathcal{D}$ ذو المعادلة $y = 2x$.



2

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

1. ▪ حساب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

إن الحساب المباشر للنهاية في 0 لا يُظهر أي شكل غير محدد :

بمـا أن $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ فـإن $\lim_{x\to 0^+}(1+\ln x) = -\infty$

ولـــدينا $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$

" $\frac{\infty}{0^+}$ " ليس شكلا غير محدد : يمكن كتابته على الشكل " $-\infty\times\frac{1}{0^+}$ " أي " $-\infty\times+\infty = -\infty$ ".

الأشكال الغير المحددة هي " $+\infty-\infty$ "، " $0\times\infty$ "، " $\frac{0}{0}$ " و " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

إذن $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(1+\ln x)=-\infty$ = $\lim_{x\to0^+}\frac{1+\ln x}{x}$ و منه $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

- حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

الحساب المباشر للنهاية في $+\infty$ يُظهر شكلا غير محدد "$\frac{\infty}{\infty}$" ، ($\lim_{x\to+\infty}(1+\ln x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$).

لإزالة هذا الشكل الغير المحدد نكتب $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0+0=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

- المستقيمات المقاربة :

- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$ أو $\lim_{x\to-\infty}f(x)=a$ فإن $\mathscr{C}_f$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=a$.
- إذا كان $\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty$ أو $\lim_{x\to a^-}f(x)=\infty$ فإن $\mathscr{C}_f$ يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=a$.

- من $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ ، نستنتج أن **المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (أي محور الأراتيب) مقارب عمودي لـ $\mathscr{C}$.**
- من $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، نستنتج أن **المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (أي محور الأفاصيل) مقارب أفقي لـ $\mathscr{C}$.**

.2 ▪ $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$.

f تكتب على شكل $\frac{u}{v}$ نستعمل إذن الصيغة : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ حيث $u=1+\ln x$ و $v=x$.

$$\forall x\in]0,+\infty[\text{ ، } f'(x)=\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)'=\frac{(1+\ln x)'(x)-(1+\ln x)(x)'}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln x)\times(1)}{x^2}=\frac{1-(1+\ln x)}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$$

إذن $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$.

لدراسة تغيرات الدالة f ، ندرس إشارة المشتقة $f'(x)$ ، أي إشارة $-\frac{\ln x}{x^2}$ على $]0,+\infty[$.

$x^2>0$ ، $\forall x\in]0,+\infty[$ إذن إشارة $-\frac{\ln x}{x^2}$ هي إشارة $-\ln x$

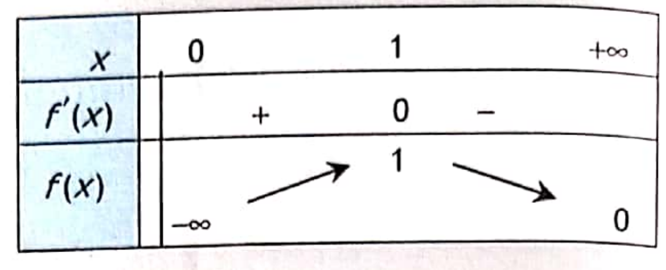
$\ln x=0\Leftrightarrow x=1$
$\ln x>0\Leftrightarrow x>1$
$\ln x<0\Leftrightarrow x<1$

نلخص دراسة إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	0	1	$+\infty$
إشارة $-\ln x$	$+$	0	$-$
إشارة x^2	$+$		$+$
إشارة $f'(x)$	$+$	0	$-$

نستنتج أن f تزايدية قطعا على $]0, 1]$ ، و تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$.

- جدول تغيرات f :



x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0



$f'(1)=0$: $\mathscr{C}$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة ذات الأفصول $x=1$.

$f'(x)$ تغير إشارتها في $x=1$ إذن f تقبل قيمة قصوى في 1 هي $f(1)=1$.

3. $f(x)=0$ تكافئ $\dfrac{1+\ln x}{x}=0$

تكافئ $1+\ln x=0$ ($x\in]0,+\infty[$ لأن $x\neq 0$)

تكافئ $\ln x=-1$

تكافئ $\ln x=-1\times\ln e$ لأن $1=\ln e$

تكافئ $\ln x=\ln e^{-1}$ لأن $n\ln x=\ln x^n$

تكافئ $x=e^{-1}$ لأن $\ln x=\ln y\Leftrightarrow x=y$

إذن $\mathscr{C}$ **يقطع محور الأفاصيل في النقطة ذات الأفصول $x_1=e^{-1}$.**

لتحديد أفصول نقطة تقاطع المنحنى $\mathscr{C}$ و محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x)=0$ على $]0,+\infty[$.

4. معادلة المماس T في النقطة ذات الأفصول $x_2=e^{-\frac{1}{2}}$:

$$y=f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$$



معادلة المماس في النقطة $M_0(x_0,f(x_0))$ هي: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1+\ln e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1-\frac{1}{2}\ln e}{e^{-\frac{1}{2}}}=\frac{1-\frac{1}{2}\times 1}{e^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}}{e^{-\frac{1}{2}}}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$$

و

$$f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=-\frac{-\frac{1}{2}\ln(e)}{e^{-\frac{2}{2}}}=\frac{1}{2e^{-1}}=\frac{e}{2}$$

معادلة المماس هي : $y=\dfrac{e}{2}\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$

أي $y=\dfrac{e}{2}x-\dfrac{e\times e^{-\frac{1}{2}}}{2}+\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2}=\dfrac{e}{2}x-\dfrac{e^{-\frac{1}{2}+1}}{2}+\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2}=\dfrac{e}{2}x-\dfrac{\cancel{e^{\frac{1}{2}}}}{\cancel{2}}+\dfrac{\cancel{e^{\frac{1}{2}}}}{\cancel{2}}=\dfrac{e}{2}x$

إذن **معادلة المماس T هي : $y=\dfrac{e}{2}x$.**

5. ▪ لدينا $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ ، $\forall x\in]0,+\infty[$.

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right)'=-\frac{(\ln x)'x^2-(\ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}$$

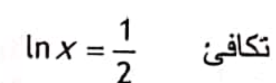
$$=-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(x^2)-(\ln x)\times 2x}{x^4}=-\frac{x-2x\ln x}{x^4}$$

إذن $\forall x\in]0,+\infty[, f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$

▪ إشارة $f''(x)$:

$f''(x)=0$ تكافئ $\dfrac{2\ln x-1}{x^3}=0$

تكافئ $2\ln x-1=0$





إذا كانت :

- f'' تنعدم في x_0 ، و
- تغير إشارتها من يسار إلى يمين x_0

فإن :

$M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف لمنحنى f.

تكافئ $\ln x = \frac{1}{2}$

تكافئ $\ln x = \frac{1}{2} \times \ln e$

تكافئ $\ln x = \ln e^{\frac{1}{2}}$ تكافئ $x = e^{\frac{1}{2}}$.

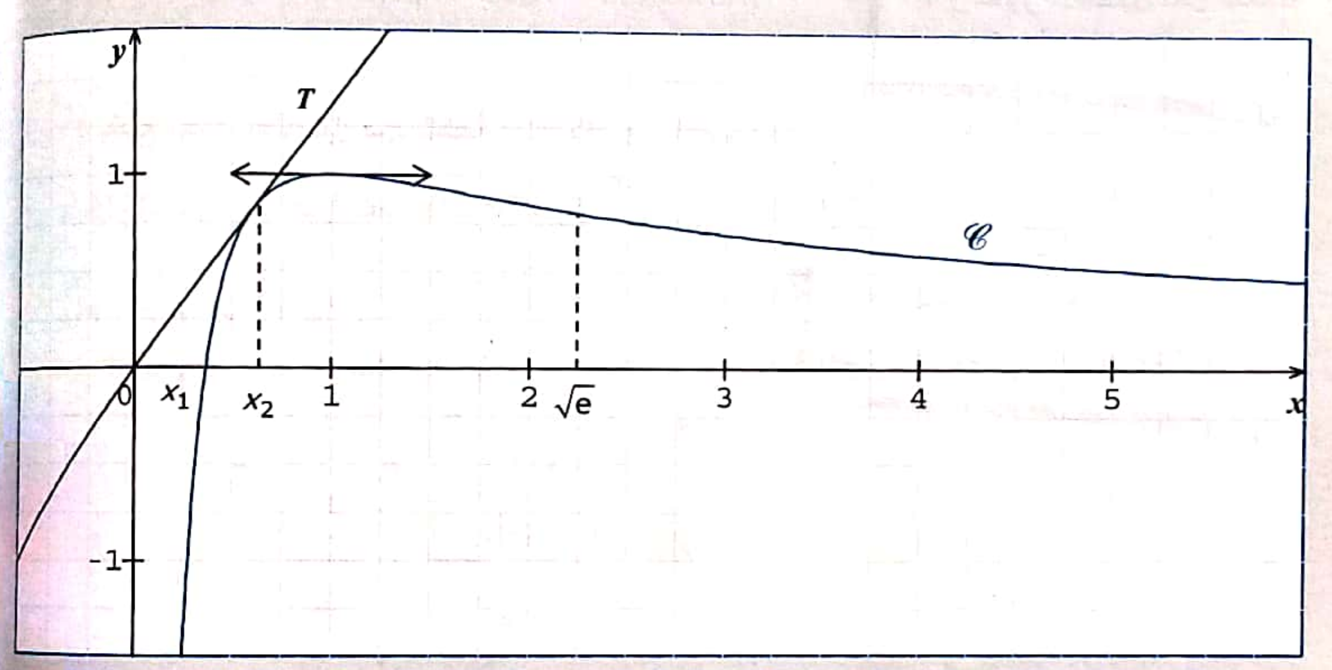
$f''(x) > 0$ تكافئ $x > e^{\frac{1}{2}}$

$f''(x) < 0$ تكافئ $0 < x < e^{\frac{1}{2}}$

$f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها في $e^{\frac{1}{2}}$ إذن f **تقبل نقطة انعطاف في** $x = e^{\frac{1}{2}}$.

$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

6. رسم المنحنى $\mathscr{C}$ و المماس T.



3

الجزء أ. $g(x) = 1 - x - 2\ln x$

1. الدالـة g قابلة للاشتقـاق على $]0, +\infty[$ ، و لدينا :

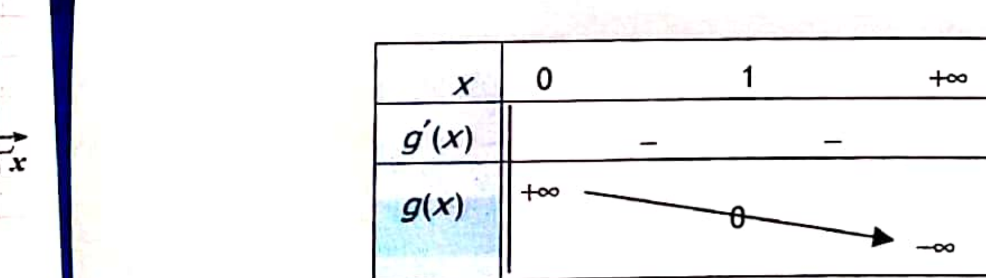
لكل $x \in]0, +\infty[$ ، $g'(x) = -1 - 2\left(\frac{1}{x}\right)$

إذن؛ $\forall x \in]0, +\infty[$ ، $g'(x) = -\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

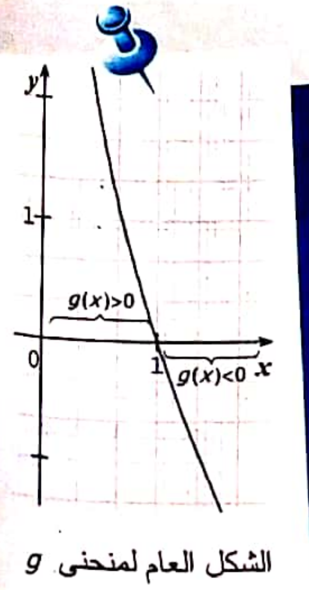
لكل $x \in]0, +\infty[$ ، $\frac{2}{x} > 0$ و منه $1 + \frac{2}{x} > 0$ إذن $-\left(1 + \frac{2}{x}\right) < 0$

أي $g'(x) < 0, \forall x \in]0, +\infty[$.

- جدول تغيرات g :



x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$



الشكل العام لمنحنى g

2. ▪ $g(1) = 1 - 1 - 2\ln 1 = 0$

- بما أن g تناقصية قطعا على $]0, +\infty[$ و تنعدم في 1، نستنتج أن :

حلول

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g(x) > 0$ و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) < 0$ (أنظر الشكل العام لمنحنى الدالـة g (غير مطلوب))

الجزء ب. $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$.

1. الدالـة f قابلة للاشتقـاق على $]0, +\infty[$ ، و لدينا :

لكل $x \in]0, +\infty[$ ،
$$f'(x) = \left(\frac{x + \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(x + \ln x)'(x^2) - (x + \ln x)(x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x^2) - (x + \ln x)2x}{x^4} = \frac{(x^2 + x) - (x + \ln x)(2x)}{x^4}$$
$$= \frac{(x^2 + x) - 2x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{-x^2 + x - 2x\ln x}{x^4}$$
$$= \frac{x[-x + 1 - 2\ln x]}{x^4} = \frac{1 - x - 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

إذن $]0, +\infty[\; x \in$ ، $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}}$

- لكل x من المجال $]0, +\infty[$ ، $x^3 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

و من الجزء أ. إذا كان $x < 1$ فإن $g(x) > 0$ إذن $\boldsymbol{f'(x) > 0, \ \forall x < 1}$.

و إذا كان $x > 1$ فإن $g(x) < 0$ إذن $\boldsymbol{f'(x) < 0, \ \forall x > 1}$.

2.

- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$ إذن $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} (x + \ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 \end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x + \ln x}{x^2}\right) = -\infty$

و بالتالي $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$

- من $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \ln x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ نحصل على الشكل الغير المحدد "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$"

لإزالة هذا الشكل الغير المحدد نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2}$

و لـديـنـا $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 0 + 0 = 0$

و بالتالي $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

3. جدول تغيرات f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

4.

- f متصلة على $]0,1]$: $x \to x + \ln x$ متصلة على $]0,1]$ (مجموع دالتين متصلتين على $]0,1]$)

و $x \to x^2$ متصلة على $]0,1]$ (دالة حدودية)

إذن $x \to f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x^2}$ خارج دوال متصلة هي دالة متصلة على $]0,1]$.



إذا كانت :
- f متصلة على $]a,b[$.
- f رتيبة قطعا على $]a,b[$.
- $\lim_{x\to a^+} f(x)>0$ و $f(b)<0$
أو $\lim_{x\to a^+} f(x)<0$ و $f(b)>0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a,b[$.

- f تزايدية قطعا على $]0,1]$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty<0$ و $f(1)=1>0$

إذن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا في المجال** $]0,1[$.

أي يوجد عدد حقيقي x_0 من المجال $]0,1[$ حيث $f(x_0)=0$.

$f(0,5)=-0,77<0$ بالدقة 10^{-2}

$f(0,6)=0,24>0$ بالدقة 10^{-2} إذن $x_0\in\,]0,5;\ 0,6[$.

4

الجزء A .

1 . a. عندما x يؤول إلى 0 بقيم موجبة ، نلاحظ أن المنحنى $\mathscr{C}_g$ "يصعد بشكل شبه عمودي"

إذن $\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$.

b. عندما x يؤول إلى $+\infty$ بقيم موجبة ، نلاحظ أن المنحنى $\mathscr{C}_g$ تقترب "دون أن تلمس" من المستقيم Δ ذو المعادلة $y=1$ إذن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$.

c. من التمثيل المبياني للدالة g لدينا : $g(1)=0$ و $g(3)=0$.

2. ▪ على المجالين $]0,1[$ و $]3,+\infty[$ ، المنحنى $\mathscr{C}_g$ يوجد فوق محور الأفاصيل إذن $g(x)>0$ على كل من المجالين $]0,1[$ و $]3,+\infty[$.

- على المجال $]1,3[$ ، المنحنى $\mathscr{C}_g$ يوجد تحت محور الأفاصيل إذن $g(x)<0$ على $]1,3[$.
- لأجل $x=1$ و $x=3$ ، المنحنى $\mathscr{C}_g$ يقطع محور الأفاصيل إذن $g(1)=0$ و $g(3)=0$.

و منه الجدول التالي :

x	0		1		3		$+\infty$
إشارة $g(x)$	‖	+	0	−	0	+	

الجزء I.B. $f(x)=-\dfrac{3}{x}-4\ln x+x$

a.1. الحساب المباشر لهذه النهاية يعطينا شكلا غير محدد من النوع "$-\infty+\infty$" لأجل هذا طلب منا التعميل بـ x في تعبير $f(x)=-\dfrac{3}{x}-4\ln x+x$ ،

نحصل على $f(x)=x\left(-\dfrac{3}{x^2}-4\dfrac{\ln x}{x}+1\right)$

$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)=0\\ \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{x^2}-4\dfrac{\ln x}{x}+1\right)=0-0+1=1\\ \lim_{x\to+\infty} x=+\infty\end{cases}$ إذن $\lim_{x\to+\infty} x\left(-\dfrac{3}{x^2}-4\dfrac{\ln x}{x}+1\right)=+\infty$

و بالتالي $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. الحساب المباشر لهذه النهاية يعطينا شكلا غير محدد من النوع "$-\infty+\infty$" لأجل هذا طلب منا التعميل بـ $\dfrac{1}{x}$ في تعبير $f(x)=-\dfrac{3}{x}-4\ln x+x$ ،

حلول

نحصل على $f(x)=\frac{1}{x}(-3-4x\ln x+x^2)$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0\\ \lim\limits_{x\to0^+} x^2=0^+\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to0^+}(-3-4x\ln x+x^2)=-3-0+0=-3$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}(-3-4x\ln x+x^2)=-3-0+0=-3\\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}(-3-4x\ln x+x^2)=-\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

2. a. ▪ $\forall x\in\,]0,+\infty[$ ، $f'(x)=-3\left(\frac{1}{x}\right)'-4(\ln x)'+(x)'=-3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)-4\left(\frac{1}{x}\right)+1=\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+1$

▪ نوحد المقامات في التعبير $f'(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+1$ ، فنحصل على $f'(x)=\frac{3-4x+x^2}{x^2}=g(x)$.

إذن $f'(x)=g(x),\ \forall x\in\,]0,+\infty[$.

b. إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، لأن $f'(x)=g(x)$.

من السؤال A .2 ، $f'(x)>0$ ، $\forall x\in\,]0,1[\cup]3,+\infty[$ ، إذن f تزايدية قطعا على $]0,1[$ و على $]3,+\infty[$.

$f'(x)<0$ ، $\forall x\in\,]1,3[$ ، إذن الدالـة f تناقصية قطعا على $]1,3[$.

و منه جدول تغيرات الدالـة f :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(1)$	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

c. $f(1)=-3-4\ln1+1=-3-4\times0+1=-3-0+1=-2$ و $f(3)=-1-4\ln3+3=2-4\ln3$.

II. 1. a. من جدول تغيرات الدالـة f ، نلاحظ أن على المجال $]0,3[$ أكبر قيمة تأخذها $f(x)$ هي $f(1)=-2<0$ **إذن المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلا فـي المجال $]0,3[$.**

b.

▪ f متصلة على $[3,10]$.

▪ f تزايدية قطعا على $[3,10]$.

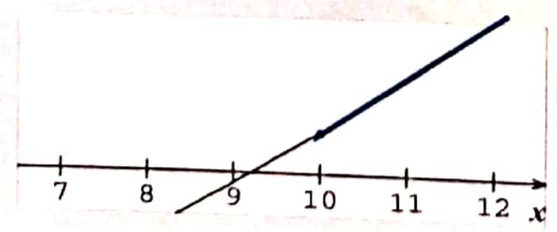
▪ $f(3)=-2,39<0$

و $f(10)=-\frac{3}{10}-4\ln10+10=-0,3-4\times2,30+10=0.49>0$ $\quad(f(10)\times f(3)<0)$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 ، ينتمي إلى المجال $]3,10[$.

c. $f(10)>0$ و f تزايدية قطعا على $]10,+\infty[$ إذن **المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلا فـي المجال $]10,+\infty[$.**

ملاحظة : f "تتزايد" انطلاقا من قيمة أكبر قطعا من الصفر، هي $0,49$ ، إذن f لا يمكن أن تأخذ القيمة صفر . ($\mathscr{C}_f$ لا يمكن أن يقطع (Ox)).



2. نعطي قيم $f(x)$ بالدقة 10^{-3}.

x	9,19	9,20	9,21	9,22
$f(x)$	−0,009	−0,003	0,003	0,009

$f(9,20) = -0,003 < 0$ و $f(9,21) = 0,003 > 0$ ، إذن $9,20 < x_0 < 9,21$.

3. a.

▪ لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (السؤال B. I. 1.)

▪ $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{x} - 4\ln x + x\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x^2} - 4\frac{\ln x}{x} + 1\right) = 0 - 0 + 1 = 1$$

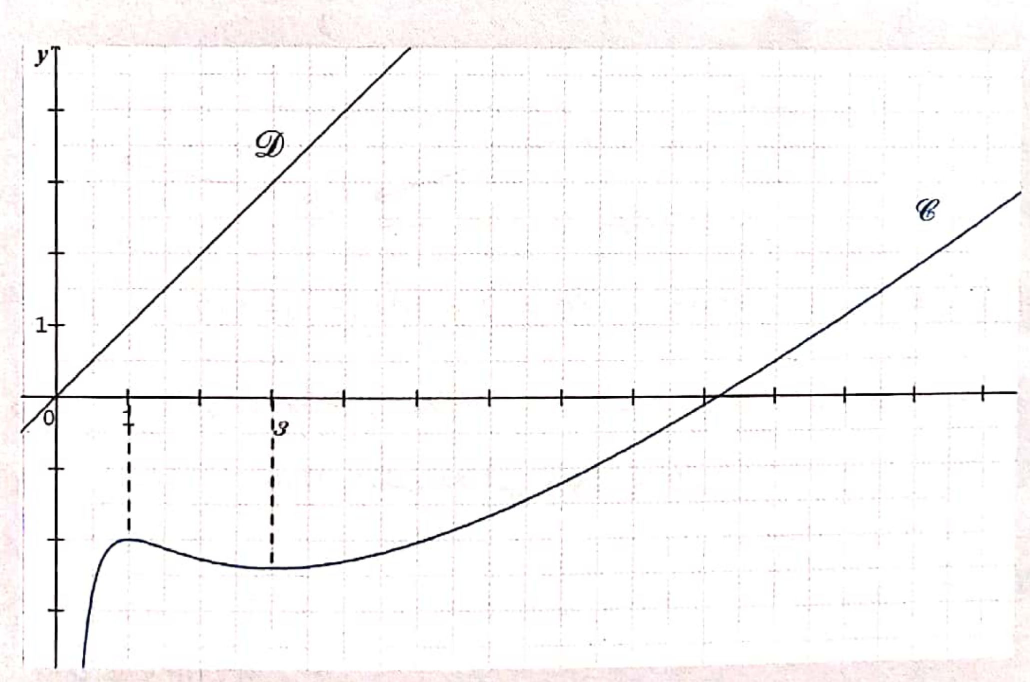
▪ $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x} - 4\ln x + x\right) - x = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x} - 4\ln x\right) = -\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}\right) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty}(-4\ln x) = -\infty$.

إذن **منحنى الدالة** f **يقبل فرعا شلجميا بجوار** $+\infty$ **اتجاهه المستقيم** $\mathscr{D}$ **ذو المعادلة** $y = x$

" يصبح الفرق كبيرا جدا بجوار $+\infty$ بين $\mathscr{C}$ و $\mathscr{D}$."

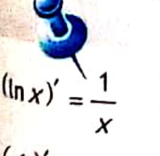
b. **منحنى الدالة** f :



5

الجزء A

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$$



$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

1. a. ▪ الدالة $x \to \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

الدالة $x \to -\frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

إذن الدالة g مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق عل $]0,+\infty[$ هي قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

و $\forall x \in]0,+\infty[$ ، $g'(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{x+1}{x^2}$

▪ $\forall x \in]0,+\infty[$ ، $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ إذن $\frac{x+1}{x^2} > 0$

حلول

و بالتالي : $g'(x)>0,\ \forall x\in]0,+\infty[$

و منه الدالة g **تزايدية قطعا على** $]0,+\infty[$.

.b ▪ g متصلة على $[1,7;1,8]$:

الدالة $x\to \ln x$ متصلة على $[1,7;1,8]$.

و $x\to \frac{1}{x}$ متصلة على $[1,7;1,8]$ لأنها دالة جذرية.

$f(x)$ مجموع دالتين متصلتين على $[1,7;\ 1,8]$ إذن فهي دالة متصلة على $[1,7;\ 1,8]$.

يمكننا أيضا استنتاج اتصال g كما يلي :

بينا في a. أن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و بالتالي على $[1,7;\ 1,8]$

و منه g متصلة على $[1,7;1,8]$.

> إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f متصلة على I .

▪ من a. الدالة g تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ و منه g تزايدية قطعا على $[1,7;1,8]$.

▪ باستعمال الحاسبة : $g(1,7)=-0,05<0$ و $g(1,8)=0,03>0$.

$g(1,8)\times g(1,7)<0$.

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,7;\ 1,8[$.

.c ▪ لدينا $g(\alpha)=0$

نعوض x بـ α في تعبير $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ ، نحصل على $g(\alpha)=\ln\alpha-\frac{1}{\alpha}$

و من السؤال السابق لدينا $g(\alpha)=0$ أي $\ln\alpha-\frac{1}{\alpha}=0$ أي $\frac{\alpha\ln\alpha-1}{\alpha}=0$ أي $\alpha\ln\alpha-1=0$

و أخيرا : $\alpha\ln\alpha=1$ ▪ الدالة g تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ و تنعدم في $x=\alpha$ ،

نستنتج إذن $\begin{cases}\forall x\in]0,\alpha[,\ \ g(x)<0\\ \forall x\in]\alpha,+\infty[,\ g(x)>0\end{cases}$.

الجزء B.

$f(x)=\ln x+x-x\ln x$

1. a.

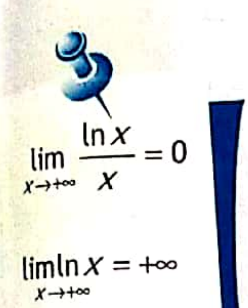
$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+x-x\ln x)=-\infty$ أي $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$.

نستنتج أن $\mathscr{C}$ منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=0$.

.b ننشر $x\left(\frac{\ln x}{x}+1-\ln x\right)$ فنحصل على $x\left(\frac{\ln x}{x}+1-\ln x\right)=x\frac{\ln x}{x}+x-x\ln x$

أي $x\left(\frac{\ln x}{x}+1-\ln x\right)=\ln x+x-x\ln x=f(x)$

▪ لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+1-\ln x\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$



.c لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ؛ نحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+x-x\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1-\ln x\right)=-\infty$$

إذن $\mathscr{C}$ منحنى f **يقبل فرعا شلجميا في اتجاه (Oy) بجوار $+\infty$.**

.a .2 الدالة f هي مجموع و جذاء دوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ، f هي إذن قابلة $]0,+\infty[$ و لدينا $\forall x\in]0,+\infty[$

$$f'(x)=(\ln x+x-x\ln x)'=(\ln x)'+(x)'-(x\ln x)'$$
$$=\frac{1}{x}+1-\left[(x)'\ln x+x(\ln x)'\right]$$
$$=\frac{1}{x}+1-\left[(1)\ln x+x\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{x}+1-[\ln x+1]$$
$$=\frac{1}{x}-\ln x$$
$$=-\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)=-g(x)$$

إذن $f'(x)=-g(x),\forall x\in]0,+\infty[$.

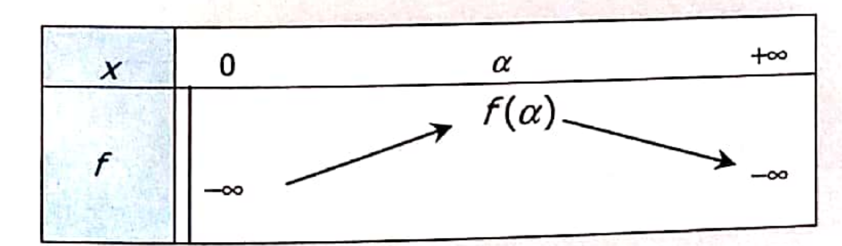
.b ▪ من السؤال .c.1 لدينا

▪ $g(x)<0$ ، $\forall x\in]0,\alpha[$ إذن $f'(x)=-g(x)>0$ ، $\forall x\in]0,\alpha[$

▪ $g(x)>0$ ، $\forall x\in]\alpha,+\infty[$ إذن $f'(x)=-g(x)<0$ ، $\forall x\in]\alpha,+\infty[$.

▪ $g(\alpha)=0$ إذن $f'(\alpha)=0$.

و منه نحصل على جدول تغيرات الدالة f :



x	0	α	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

▪ نعوض x بـ α في تعبير $f(x)=\ln x+x-x\ln x$ ، نحصل على $f(\alpha)=\ln\alpha+\alpha-\alpha\ln\alpha$

من .1.A .c لدينا $\alpha\ln\alpha=1$ إذن $f(\alpha)=\ln\alpha+\alpha-1$

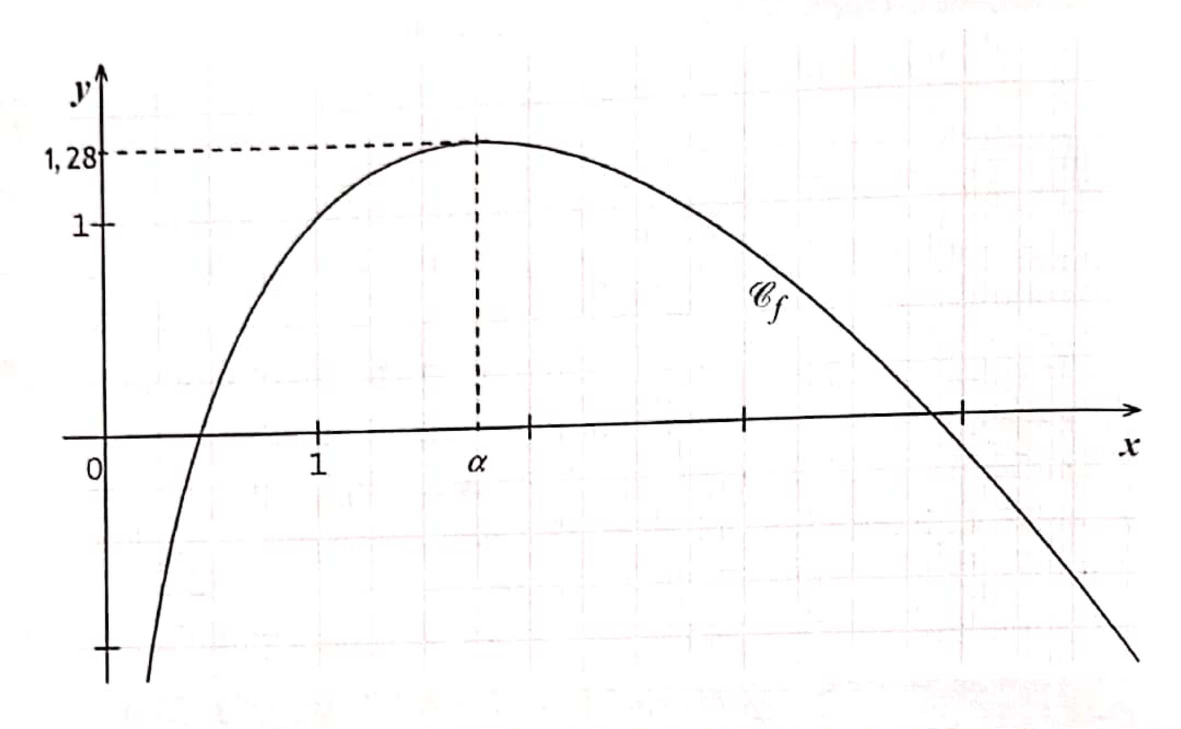
و كذلك من $\alpha\ln\alpha=1$ لدينا $\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$

نعوض $\ln\alpha$ بـ $\dfrac{1}{\alpha}$ في التعبير $f(\alpha)=\ln\alpha+\alpha-1$ فنحصل على $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}+\alpha-1$.

نأخذ $\alpha=1{,}7$ ، نحصل على قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ بالدقة 10^{-2} :

$f(\alpha)=1,28$ إذن $f(\alpha)=\dfrac{1}{1,7}+1,7-1$

c. منحنى الدالة f.



6

A . $g(x)=x-\ln x$

1. الدالة ln معرفة لأجل كل x من $]0,+\infty[$ إذن الدالة g معرفة لأجل كل x من $]0,+\infty[$.

2. ▪ حساب الدالة المشتقة لـ g .

- الدالة $x\to x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.
- الدالة $x\to \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

إذن الدالة g (مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$) هي قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ، و لدينا :

لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ، $g'(x)=(x)'-(\ln x)'=1-\dfrac{1}{x}$

إذن $g'(x)=\dfrac{x-1}{x};\ \ \forall x\in\ ]0,+\infty[$

▪ نحدد جدول تغيرات g .

ندرس أولا إشارة $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}$ على $]0,+\infty[$. لأجل هذا نستعمل الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
x	‖	+		+	
$x-1$	‖	−	0	+	
$g'(x)=\frac{x-1}{x}$	‖	−	0	+	

و منه جدول تغيرات g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	−	0	+	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

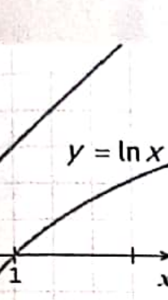
.3 • $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \end{cases}$ و منه $\lim\limits_{x\to 0^+} (x-\ln x) = 0-(-\infty) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

• ▪ من $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ ، نحصل على الشكل الغير المحدد "$+\infty-\infty$"

لا يمكن إذن استنتاج مباشرة $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$:

▪ نعمل بـ x فـي تعبير $f(x)$ لإظهار النهاية المرجعية $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: نحصل على

$g(x) = x - \ln x = x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$ لكل $x>0$.



الشكل 1

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

و بالتالي $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

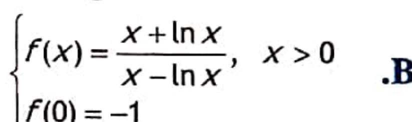
.4 من خلال الجدول السابق يتبين أن $g(x) \geq f(1) = 1-\ln 1 = 1 > 0$.

إذن $\forall x>0, g(x)>0$ أي أن $x-\ln x>0$ ، $\forall x>0$

إذن $x > \ln x$ ، $\forall x > 0$ (المستقيم $y=x$ فوق منحنى الدالة ln ، الشكل 1).

الشكل 2

ملاحظة: بإعطاء الشكل العام للدالة g (من خلال جدول التغيرات) نلاحظ أن $\forall x>0$ $g(x)>0$ ($\mathscr{C}_g$ فوق المحور (Ox) الشكل 2).

.B 
$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}, & x>0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

.1 $\mathscr{D}_f = \{x\in\mathbb{R} \,/\, x-\ln x \neq 0\}$.

من السؤال **A. 3.** لدينا $x-\ln x>0$ ، $\forall x>0$ و منه $x-\ln x\neq 0$ ، $\forall x\in]0;+\infty[$

و بما أن 0 له صورة : $f(0)=-1$ فإن $0\in\mathscr{D}_f$ إذن $\mathscr{D}_f = \{0\}\cup]0,+\infty[$ أي $\mathscr{D}_f = [0,+\infty[$.

.2 ***a.*** لدينا $f(0)=-1$

بما أن $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ فإن $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} (x+\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-\ln x) = +\infty \end{cases}$ و منه نحصل على شكل غير محدد من النوع "$\frac{\infty}{\infty}$"

لكل $x\in]0,+\infty[-\{1\}$ ، $f(x) = \dfrac{x+\ln x}{x-\ln x} = \dfrac{\ln x\left(\frac{x}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{x}{\ln x}-1\right)} = \dfrac{\left(\frac{x}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{x}{\ln x}-1\right)}$

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0$ ($\frac{0}{\infty}$ شكل محدد يساوي 0) و منه $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{\ln x}+1\right) = 0+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{\ln x}-1\right) = 0-1 = -1 \end{cases}$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\left(\frac{x}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{x}{\ln x}-1\right)} = \frac{1}{-1} = -1$ أي $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$.

لدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ و بالتالي **f متصلة في 0 على اليمين.**

b. الحساب المباشر لـ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ يعطينا شكل غير محدد في المقام من النوع "$+\infty-\infty$".



لكل $x \in]0,+\infty[$ ، $f(x) = \dfrac{x+\ln x}{x-\ln x} = \dfrac{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)} = \dfrac{\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (نهاية اعتيادية) و منه $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = 1+0 = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = 1-0 = 1\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)} = \dfrac{1}{1} = 1$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. (المستقيم $y = 1$ هو مقارب لمنحنى الدالة f).

f قابلة للاشتقاق في a على اليمين إذا كان لـ $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهاية منتهية عندما $x \to a^+$.
و لدينا $f_d'(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

3. a. لكل $x \in]0,+\infty[$ ، $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\frac{x+\ln x}{x-\ln x}+1}{x}$

$= \dfrac{x+\ln x + x - \ln x}{x(x-\ln x)} = \dfrac{2x}{x(x-\ln x)} = \dfrac{2}{x-\ln x}$

بما أن $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to0^+}(x-\ln x) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2}{x-\ln x} = 0$ أي $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

و بالتالي **f قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين و $f_d'(0) = 0$.**

بما أن $f_d'(0) = 0$ فإن $\mathscr{C}_f$ يقبل في النقطة $A(0, f(0))$ أي $A(0,-1)$ نصف مماس أفقي

b. $x \to \dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}$ خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا لكل x من $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x+\ln x)'(x-\ln x)-(x+\ln x)(x-\ln x)'}{(x-\ln x)^2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-\ln x)-(x+\ln x)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}$$

$$= \frac{x-\ln x+1-\frac{\ln x}{x}-x+1-\ln x+\frac{\ln x}{x}}{(x-\ln x)^2}$$

$$= \frac{2-2\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

إذن ، $\forall x \in]0,+\infty[; \quad f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$

• بما أن $(x-\ln x)^2 > 0$ ، $\forall x \in]0,+\infty[$ فإن إشارة $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$ هي إشارة $1-\ln x$

لدينا : $\begin{cases}1-\ln x > 0\\ x>0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}\ln x < 1\\ x>0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x<e\\ x>0\end{cases}$ تكافئ $0<x<e$.

كما لدينا : $\begin{cases}1-\ln x < 0\\ x>0\end{cases}$ تكافئ $x>e$.

و $\begin{cases}1-\ln x = 0\\ x>0\end{cases}$ تكافئ $x=e$.

لدراسة إشارة $1-\ln x$ على $]0,+\infty[$ نحل أولا المتراجحتين $1-\ln x > 0$ و $1-\ln x < 0$ على $]0,+\infty[$ بدل البدء بحل المعادلة $1-\ln x = 0$.

و منه جدول تغيرات f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	−	
$f(x)$	−1	↗	$\frac{e+1}{e-1}$	↘	1

$f(e) = \dfrac{e+\ln e}{e-\ln e} = \dfrac{e+1}{e-1}$

4. a. لكي نحدد تقاطع المنحنى $\mathscr{C}$ و المستقيم (Δ) الذي معادلته الديكارتية : $y=1$ نحل المعادلة $f(x)=1$ في $\mathscr{D}_f=]0,+\infty[$ ، و لدينا :

$f(x)=1$ تكافئ $\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}=1$ تكافئ $x+\ln x=x-\ln x$

تكافئ $2\ln x=0$ تكافئ $\ln x=0$ تكافئ $x=1$.

بما أن $1\in\mathscr{D}_f=]0,+\infty[$ فإن $S=\{1\}$

إذن تقاطع المنحنى $\mathscr{C}$ و المستقيم (Δ) هو النقطة $A'(1,f(1))$ أي $A'(1,1)$.

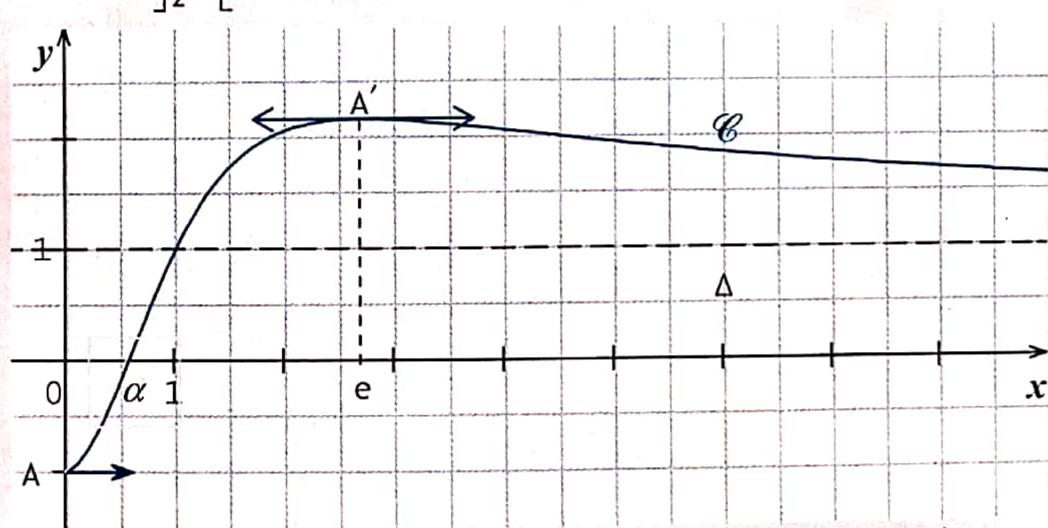
$y=0$: هي معادلة محور الأفاصيل

b. لكي نبين أن $\mathscr{C}$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى المجال $]\frac{1}{2},1[$ نحل المعادلة $f(x)=0$ في $]\frac{1}{2},1[$.

- الدالة f متصلة على $[\frac{1}{2},1]$ (خارج دالتين متصلتين)
- f تزايدية قطعا على $[\frac{1}{2},1]$.
- $f(1)>0$ و $f(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}-\ln 2}{\frac{1}{2}+\ln 2}\approx\dfrac{0,5-0,7}{0,5+0,7}<0$ $\left(f(1)\times f(\frac{1}{2})<0\right)$

إذن ، حسب مبرهنة القيم الوسيطية : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]\frac{1}{2},1[$ ،

و بالتالي **$\mathscr{C}$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها α ينتمي إلى المجال $]\frac{1}{2},1[$.**



7

الجزء A . $f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2$

1 . الدالـة f معرفة على المجال $[0,+\infty[$.

- الدالة $u:x\to x+1$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ لأنها دالة حدودية.

و $\forall x\geq 0 \quad x+1\geq 1>0$ أي $\forall x\in[0,+\infty[$ ، $u:x\to x+1$ موجبة قطعا

إذن $x\to\ln(x+1)$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ (مركب $\ln$ و الدالة u) و لدينا :

$$\ln(x+1)=\frac{(x+1)'}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$

- الدالة $v:x\to\frac{1}{2}x^2$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ لأنها دالة حدودية.

و لدينا : $v'(x)=\frac{1}{2}\times 2x=x$.

$x\to f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2$ مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0,+\infty[$ إذن

f قابلة للاشتقـاق على $[0,+\infty[$ و لدينا :

$f'(x)=\frac{1}{x+1}+x$ ؛ $\forall x\in[0,+\infty[$

• ندرس إشارة $f'(x)$:

$\frac{1}{x+1}>0$ و منه $x+1>0$ ، $\forall x\in[0,+\infty[$

إذن $f'(x)=\frac{1}{x+1}+x>0$ ؛ $\forall x\in[0,+\infty[$

و بالتالي : **f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.**

2. معادلة المماس T للمنحنى $\mathscr{C}$ في النقطة ذات الفصول 0 هي :

$$y=f'(0)(x-0)+f'(0)$$

$f(0)=\ln(0+1)+\frac{1}{2}0^2=\ln 1=0$ و $f'(0)=\frac{1}{0+1}+0=1$

إذن ، $y=1(x-0)+0$

و بالتالي ؛ **معادلة المماس T هي $y=x$.**

3. $x\in[0,+\infty[$ ، $g(x)=f(x)-x$

a. نحسب مشتقة الدالـة g على المجال $[0,+\infty[$:

• الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ (من السؤال 1.) و لدينا :

$f'(x)=\frac{1}{x+1}+x$ ؛ $\forall x\in[0,+\infty[$

• الدالة $w: x\to -x$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ لأنها دالة حدودية ،

و لدينا : $w'(x)=-1$.

$g: x\to f(x)-x$ مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0,+\infty[$ إذن

g قابلة للاشتقـاق علـى $[0,+\infty[$ و لدينا :

$$g'(x)=f'(x)-(x)'=\frac{1}{x+1}+x-1$$

$$=\frac{1+x(x+1)-(x+1)}{x+1}$$

$$=\frac{1+x^2+x-x-1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$$

$\forall x\ge 0$ ، $\begin{cases}x^2\ge 0\\ x+1>0\end{cases}$ إذن $g'(x)=\frac{x^2}{x+1}\ge 0$

و بالتالي : **g تزايدية على $[0,+\infty[$.**

b. لدينا $g(0)=f(0)-0=\ln(0+1)+\frac{1}{2}0^2=\ln 1=0$

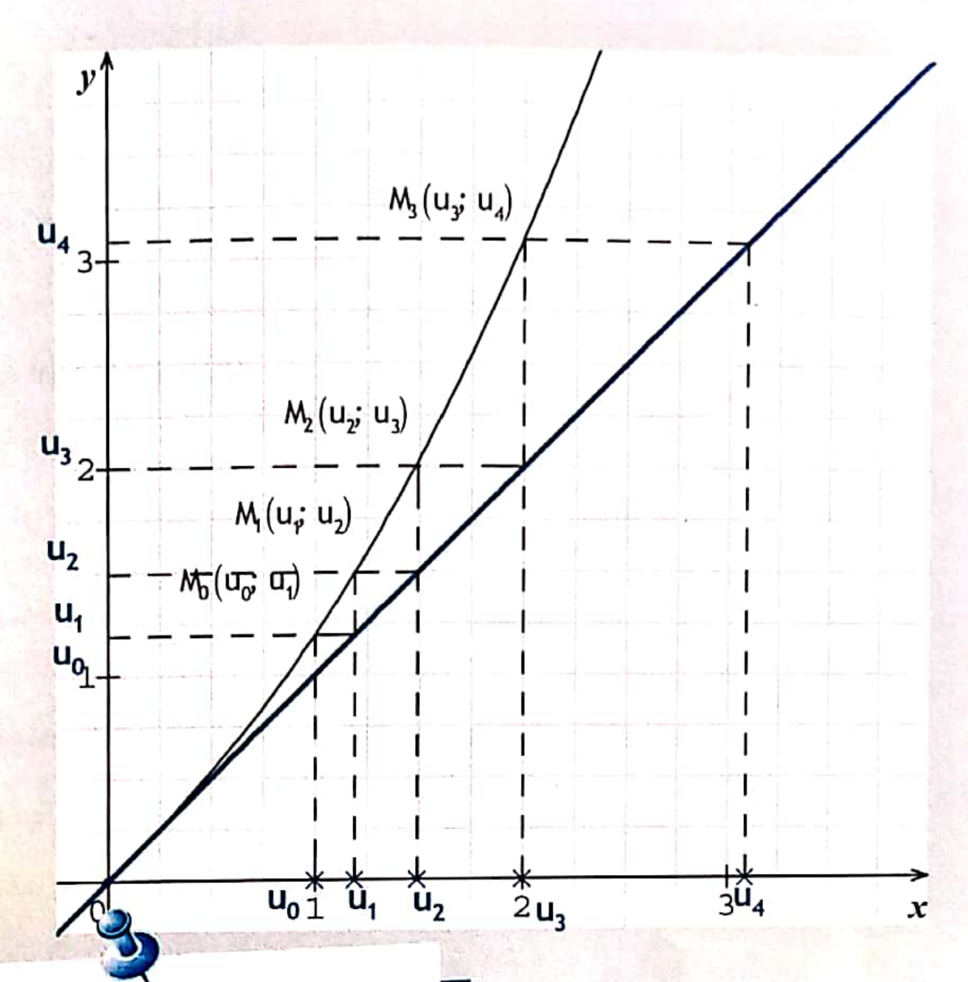
الدالـة g تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

و بما أن $g(0)=0$ فإن $g(x)\ge g(0)=0;\ \forall x\ge 0$

c. لدينا $g(x)\ge 0;\ \forall x\ge 0$ أي $f(x)-x\ge 0;\ \forall x\ge 0$ ،أي $\forall x\in[0,+\infty[\ \ f(x)\ge x$.

إذن المنحنى $\mathscr{C}$ يوجد فوق المستقيم T ذو المعادلة $y=x$ على المجال $[0,+\infty[$.

.4



لدينا $u_0 = 1$ و بحساب صور بـالدالة f نجد :

$u_1 = f(u_0) = f(1) = \ln 2 + \frac{1}{2}1^2 \simeq 1,19$

$u_2 = f(u_1) = f(1,19) = \ln(1,19+1) + \frac{1}{2}(1,19)^2 \simeq 1,49$

$u_3 = f(u_2) = f(1,49+1) = \ln(2,49) + \frac{1}{2}(1,49)^2 \simeq 2$

$u_4 = f(u_3) = f(2) = \ln(2+1) + \frac{1}{2}(2)^2 \simeq 3,09$

الجزء B

$u_{n+1} = f(u_n)$ و لكل n من $\mathbb{N}$ و $u_0 = 1$

1. ننشئ على المنحنى $\mathscr{C}$ النقطة M_0 التي أفصولها $u_0 = 1$ و أرتوبها $u_1 = f(u_0)$.
و منه نستنتج على المنصف الأول $y = x$ النقطة ذات الإحداثيات $M(u_0, u_1)$ ثم نقوم بإسقاطها على محور الأفاصيل لنحصل على u_1.
نكرر نفس الطريقة بالنسبة للنقطة $M_1(u_1; u_2)$
...

2. لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ **يمكننا أن نتنبأ أن المتتالية (u_n) تزايدية و أنها تؤول إلى $+\infty$.**

3. a. نبين بالترجع أن لكل عدد صحيح طبيعي n ، $u_n \geq 1$.
- إذا كان $n = 0$ ، $u_0 = 1 \geq 1$ ، إذن الخاصية صحيحة لأجل $n = 0$.
- نفترض أن الخاصية صحيحة لأجل $n = p$ أي $u_p \geq 1$.
- نبين أن الخاصية صحيحة لأجل $n = p+1$ أي $u_{p+1} \geq 1$.

لدينا $u_p \geq 1$ و بما أن f متصلة و تزايدية قطعا على $[0, +\infty[$ فإن $f(u_p) \geq f(1)$

لدينا $f(u_p) = u_{p+1}$ و $f(1) = \ln 2 + \frac{1}{2}1^2 = 1,19 \geq 1$

إذن $u_{p+1} = f(u_p) \geq f(1) \geq 1$

و بالتالي ؛ **لكل عدد صحيح طبيعي n ، $u_n \geq 1$.**

b. نبين أن المتتالية (u_n) تزايدية أي أن $u_{n+1} \geq u_n$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$
لدينا من السؤال **3. c.** $\forall x \in [0, +\infty[$ ، $f(x) \geq x$ ،
و من السؤال السابق $u_n \geq 1$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$ أي أن $u_n \in [0; +\infty[$ إذن $f(u_n) \geq u_n$

بما أن $f(u_n)=u_{n+1}$ فإن $u_{n+1}\geq u_n$ ، $\forall n\in\mathbb{N}$
و بالتالي؛ **المتتالية (u_n) تزايدية.**

c. نبين أن المتتالية (u_n) غير مكبورة .

نفترض أن " المتتالية (u_n) مكبورة "
لدينا المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة إذن (u_n) متقاربة.
لتكن l نهاية المتتالية (u_n) لدينا $l\geq 1$ (لأن $u_n\geq 1$ ، $\forall n\in\mathbb{N}$)
l هي حل المعادلة $f(x)=x$ على $[0;+\infty[$ (لأن f متصلة على $[0;+\infty[$)
بما أن $g(0)=f(0)-0=0$ فإن $f(0)=0$
و بما أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا على $[0;+\infty[$ هو 0؛
إذن $l=0$ و هذا غير ممكن لأن $l\geq 1$.
و منه الافتراض : " المتتالية (u_n) مكبورة " غير صحيح.

و بالتالي؛ **المتتالية (u_n) غير مكبورة .**

d. **بما أن المتتالية (u_n) تزايدية و غير مكبورة نستنتج أن نهاية u_n هي $+\infty$ أي $\lim u_n=+\infty$**

8

1. دراسة الدالة $f(x)=-x^2+3x-1-\ln x$

- **حيز تعريف الدالة f هو : $\mathcal{D}_f=]0,+\infty[$.**
- كل من الدالتين $x\to -x^2+3x-1$ و $x\to -\ln x$ متصلتين على $]0,+\infty[$ ، و منه f ، مجموع هاتين الدالتين، هي **دالة متصلة على $]0,+\infty[$.**
- حساب النهايات :
  - النهاية على يمين 0 : لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2+3x-1)=-0^2+3\times 0-1=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.
  - النهاية عند $+\infty$: لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^2+3x-1)=\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$.
- اشتقاق f على $]0,+\infty[$:

الدالة f ، مجموع الدالتين $x\to -x^2+3x-1$ و $x\to -\ln x$ القابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ، **هي قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.**

و لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[;f'(x)=(-x^2+3x-1-\ln x)'=-2x+3-\dfrac{1}{x}$

إذن $\forall x\in]0,+\infty[;f'(x)=\dfrac{-2x^2+3x-1}{x}$.

إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$ هي إشارة $-2x^2+3x-1$ (لأن $x>0$)

نحدد جذور $-2x^2+3x-1$: نحسب $\Delta=3^2-4(-2)(-1)=1$ إذن $x_1=\dfrac{1}{2}$ و $x_2=1$

و منه

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
إشارة $(-x^2+3x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إشارة $P(x)=ax^2+bx+c$ عندما يكون لها جذرين هي إشارة a **خارج الجذرين**

• جدول تغيرات f

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{4}+\ln 2$	↗	1	↘	$-\infty$

II. دراسة الدالة $g(x)=x-\ln(x)$

• **حيز تعريف الدالة g هو** $\mathscr{D}_g=]0,+\infty[$.

• كل من الدالتين $x\to x$ و $x\to -\ln x$ متصلتين على $]0,+\infty[$ ، و منه g ، مجموع هاتين الدالتين، هي دالة متصلة على $]0,+\infty[$.

• حساب النهايات :

○ النهاية على يمين 0: لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} x=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$.

○ النهاية عند $+\infty$: لدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty\end{cases}$

لا يمكن استنتاج $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$: نحصل على الشكل الغير المحدد $("+\infty-\infty")$

نزيل هذا الشكل الغير المحدد كما يلي :

$\forall x\in]0,+\infty[$ لدينا $g(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

بما أن $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ فإن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-0=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty\end{cases}$ إذن $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

و منه $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$.

• اشتقاق g على $]0,+\infty[$:

الدالة g ، مجموع الدالتين $x\to x$ و $x\to -\ln x$ القابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ، هي قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

○ نحسب المشتقة g':

$\forall x\in]0,+\infty[; g'(x)=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

بما أن $x\in]0,+\infty[$ فإن $g'(x)$ لها نفس إشارة $x-1$ و منه :

• جدول تغيرات g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

حلول